



TITLE:

量子乱流：超流動ヘリウムから原子
気体ボース・アインシュタイン凝
縮体へ (オイラー方程式の数理解析：渦
運動150年)

AUTHOR(S):

坪田, 誠

CITATION:

坪田, 誠. 量子乱流：超流動ヘリウムから原子気体ボース・アインシュ
タイン凝縮体へ (オイラー方程式の数理解析：渦運動150年). 数理解析研究
所講究録 2009, 1642: 67-78

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140605>

RIGHT:

量子乱流 -超流動ヘリウムから原子気体ボース・アインシュタイン凝縮体へ-

大阪市立大学・大学院理学研究科 坪田 誠 (Makoto Tsubota)
Department of Physics, Faculty of
Science
Osaka City University

1. はじめに -もう一つのダ・ヴィンチ・コード-

自然界は流れに満ちている。そしてそのほとんどの流れは、乱流である。このような乱流研究の歴史は古く、近代科学および技術の発展とともにあったと言ってよい。最初に乱流を近代的な視点からとらえたのはレオナルド・ダ・ヴィンチである。ダ・ヴィンチは水



図 1 ダ・ヴィンチが描いた乱流のスケッチ

から成る乱流のスケッチを残している(図 1)。ダ・ヴィンチは、単に、乱流は乱れた流れであると言ったのではない。その中に構造があり、それを担うのは渦であると指摘したのである。これは驚異的な観察眼と言わざるを得ない。この「乱流は渦から成る」というメッセージを「もう一つのダ・ヴィンチ・コード(Another Da Vinci Code)」と呼ぼう¹⁾。

ダ・ヴィンチ以降現代に至るまで、乱流に関しては、物理や数学などの基礎科学から流体力学・航空工学などの応用科学に至るまで、膨大な研究が積み重ねられてきた^{2), 3)}。20世紀になってからも、多くの名立たる物理学者が一度は取り組む問題が乱流であった。事実、ランダウ、ファインマン、ハイゼンベルグなどは乱流研究でも大きな足跡を残している。しかし、ファインマンが「乱流は古典物理学の重要な未解決

問題である」と述べているように、乱流は難問であり、その長い研究の歴史と関連分野の広範性にもかかわらず、十分な解明がなされたとは言えない。その原因は、乱流が非常に複雑な、非線形および非平衡の動的現象であるためである。このような大自由度の系に対し何らかの粗視化により自由度の軽減または有効自由度の抽出ができれば良いが、それは困難である。このとき「もう一つのダ・ヴィンチ・コード」が重要な鍵と期待されるが、通常流体の乱流の場合、乱流と渦の関係を理解することは容易ではない。

この「もう一つのダ・ヴィンチ・コード」は、最近、むしろ量子流体が生み出す量子乱流⁴⁻⁶⁾で実現していることが明らかになってきた。本稿は、量子乱流の入門的解説を試みる。量子乱流は、物性物理学(低温物理学)、流体力学、数理物理学を横断する非常に興味深い問題である。

2. 超流動ヘリウムとボース・アインシュタイン凝縮

低温物理学の世界では液体ヘリウムの超流動の研究が行われてきた⁷⁾。液体⁴Heは2.17K(ラムダ温度と呼ぶ)以下の低温でボース・アインシュタイン凝縮を起こし、超流動状態に転じる。超流動とは、非粘性の流れが安定に存在する状態を言う。液体⁴Heの超流動現象は1930年代に発見された。例えば、普通の流体は粘性のため直径ミクロン程度の毛細管を流れる事はできない。しかしラムダ温度以下になった液体⁴Heは粘性を失うため、容易に毛細管内を流れるようになる。当時発見された様々な超流動現象を理解するために、ティサ、およびランダウは有名な二流体モデルを提唱した。それによれば、超流動液体⁴Heは、非粘性の超流体と粘性を持った常流体が混合したものとして記述される。両者の混合比は温度に依存し、ラムダ温度以上では全て常流体であるが、ラムダ温度以下低温になるにつれて超流体の比率が増し、約1K以下ではほとんど全て超流体となる。

ボース凝縮を起こした系では、各原子の物質波がコヒーレントに重なった巨視的波動関数 $\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} \exp(i\theta(\mathbf{r}))$ が形成され

る。ここで $n_0(\mathbf{r})$ は凝縮体の密度、 $\theta(\mathbf{r})$ は位相である。このようなコヒーレントな巨視的波動関数（秩序変数）の運動と、有限温度では熱的励起の運動が共存することが超流動流体力学の特徴である。熱的励起が常流体に対応し、全流体から常流体を差し引いた部分が超流体になる。超流体および常流体の運動方程式は、それぞれ、完全流体のオイラー方程式、および粘性流体のナビエ・ストークス方程式と同等であり、後述の量子渦が存在しないとき二流体は独立である。超流動速度場は $\Psi(\mathbf{r})$ の位相をポテンシャルとして $\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = (\hbar/m)\nabla\theta(\mathbf{r})$ と表され（ここで m はボース粒子の質量である）、 $\text{rot}\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = 0$ となるポテンシャル流れ（渦無し流れ）である。しかし超流体中に欠陥が存在する場合はその限りでは無い。巨視的波動関数が空間座標の一価関数であるという要請から、超流動速度場の循環 $\Gamma = \oint \mathbf{v}_s(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ は循環量子 $\kappa = h/m$ を単位として量子化される。このような量子化された循環をもつ渦（位相欠陥）を量子渦と言う。量子渦はオンサーガー⁸⁾、ファインマン⁹⁾によって予言され、ヴァイネンにより発見された。

量子渦が存在すると、その常流体との相互作用を介して、超流体と常流体は独立でなくなる。そしてこのような量子渦が作る超流動速度場の乱流を、量子乱流（または超流動乱流）と言う。

このことは、驚くべき乱流の単純化の可能性を示している。すなわち、普通の乱流（これを以下、古典乱流と呼ぶ）では、それを構成する渦は不安定で生成消滅を繰り返し、個々の渦の強さを表す循環は保存量ではなく、連続的な任意の値をとり時間的に変動する。この場合、乱流にとって渦の存在がどれほど不可欠かつ本質的かは自明でない。ところが、量子乱流は、全て同一の、保存量としての循環をもつ安定な位相欠陥である量子渦によって構成される。これは、物質が原子によって構成されるように、乱流も最小単位の渦によって構成されるという意味で、要素還元的な見

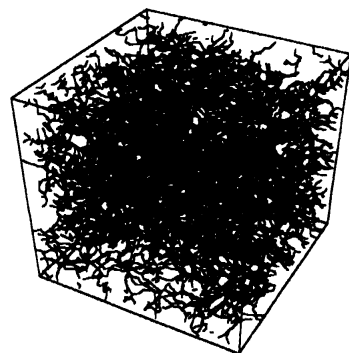


図 2 量子乱流中の渦タングル

方を乱流に導入できる可能性を示す。「もう一つのダ・ヴィンチ・コード」が量子流体でこそ期待できると言ったのは、こうした事情のためである。

超流動ヘリウムの乱流が発見されて約半世紀が経過した。ところが最近まで、古典乱流と量子乱流の対比は考えられた事がなかった。1990年代の後半から量子乱流の研究は新しい段階に突入し、世界的にも大きな潮流を形成しつつある⁶⁾。

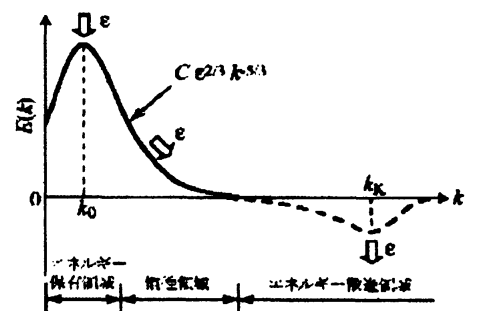
3. 新世代の量子乱流研究

前節で述べたような認識を背景に、90年代の後半から、世界中で続々と画期的な実験研究が行われた。これらは、(i)量子渦が主役であり、(ii)量子乱流と古典乱流の比較を念頭に置き、さらには(iii)古典乱流に無い新奇の乱流現象を明らかにすると言う意味で、新世代の量子乱流研究と呼ぶに相応しい。

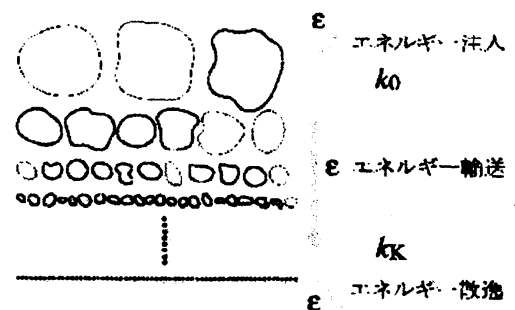
3-1 エネルギースペクトル

乱流のような多自由度の動的現象を考える場合、統計則に注目することは重要である。レイノルズ数が高く、十分発達した一様等方な乱流において統計則を研究することの重要性は、1930年代にテイラーによって指摘された。これが近代的な乱流研究の幕開けである。1941年、コルモゴロフ^{10), 11)}は、エネルギースペクトルのコルモゴロフ則を提唱する。

定常な一様等方乱流のエネルギースペクトルは図3(a)のような特徴を持つ。これは、ある大きなスケール（低波数）で流体に注入されたエネルギーが、異なる波数モード間の非線形相互作用



(a)



(b)

図3 発達した乱流中のエネルギースペクトルの概念図と(a)とリチャードソンカスケード

により小さなスケール（高波数）に輸送され、最終的に粘性により散逸するという、エネルギーの流れを表している。ここで波数領域は、低波数側から、エネルギー保有領域、慣性領域、エネルギー散逸領域に分けられる。エネルギー保有領域では、何らかの外力により、ある波数 k_0 において注入率 ε でエネルギーが流体に注入される。エネルギー散逸領域では、コルモゴロフ波数 $k_k = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$ において散逸率 ε でエネルギーが散逸される。

乱流に特有な自己相似性が現れるのは、中間の慣性領域である。ここでは、粘性散逸は効かず、エネルギー注入も無く、エネルギーは保存されたまま低波数から高波数へ、輸送率 ε で輸送される。この領域が自己相似的であり、エネルギースペクトル $E(k)$ が k と ε のみによって決まるとすれば、有名なコルモゴロフのマイナス 3 分の 5 乗則

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (1)$$

が得られる。ここで C はコルモゴロフ定数と呼ばれ、物質によって定まる 1 のオーダーの普遍定数である。この慣性領域の自己相似性は、しばしば、図 3(b) のような、リチャードソン・カスケード過程によって説明される。大スケールから小スケールへのエネルギーの輸送は、このように大きな渦が自己相似的に小さな渦に分裂することによって、象徴的に表される。この描像はいかにももっともらしいが、このカスケード過程は、露に観測されたことがなく、あくまで概念的なものに過ぎない。それは、古典流体中では渦の同定が困難だからである。

90 年代後半から、超流動 ^4He において、逆向きに回転する円板間で生成される乱流¹²⁾で、また格子の背後に作られる乱流¹³⁾において、相次いでコルモゴロフ則が確認された。

有限温度で超流体と常流体の両方が存在する場合のエネルギースペクトルの理解は容易でない。ここでは十分低温で常流体が存在しない、純粋な超流体の場合について述べる。現在まで、量子乱流のエネルギースペクトルを数値的に調べ

た研究は3つある。まず、フランスのノラ達¹⁴⁾は、巨視的波動関数が従う Gross-Pitaevskii(GP)方程式による量子乱流のエネルギースペクトルを数値的に求めた。それは一時的にコルモゴロフ則を示すように見えるが、時間が経過するとすぐにそこから逸脱する。次いで、荒木、坪田達¹⁵⁾は渦糸法によりやはり量子乱流のエネルギースペクトルを調べ、コルモゴロフ則が成り立つことを示した(渦糸モデルは、古典流体力学では理想化された toy model だが、量子流体力学では前述の理由により、現実的なモデルとなる)。さらに、小林と坪田は GP 方程式により、減衰乱流¹⁴⁾および定常乱流¹⁵⁾を作り、いずれの場合もコルモゴロフ則が成り立つことを見いだした。GP 方程式のエネルギースペクトルを考察するとき、これが圧縮性流体を記述することに注意しなければならない。エネルギーを圧縮成分と非圧縮成分に分け、非圧縮成分が量子渦のリチャードソンカスケードを反映したコルモゴロフスペクトルを示すのである。

定常状態での渦タングルを図 4(a)に、非圧縮性運動エネルギーのスペクトルを図 4(b)に示す。点が数値的に求めたエネルギースペクトル、実線がコルモゴロフ則を表し、慣性領域でコルモゴロフ則が成り立っている事がわかる。

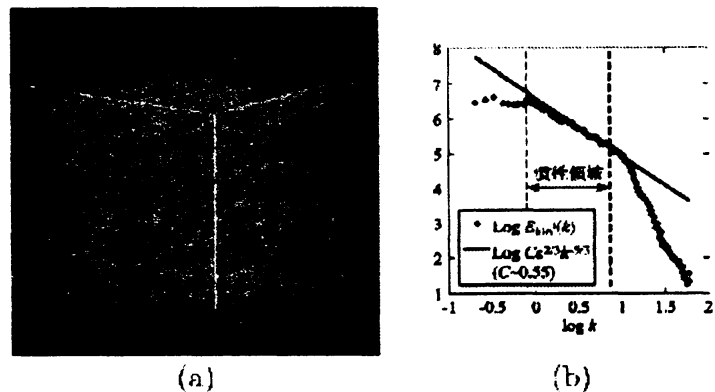


図 4 定常渦タングル(a)とエネルギースペクトル(b)

3-2 速度に依存しない量子乱流遷移

通常の乱流遷移は流速、すなわちレイノルズ数を増すことで起こる。フィンランドのクルシウス達¹⁸⁾は、超流動 ^3He の B 相において、流速ではなく、むしろ温度によって決まる乱流遷移を発見した。液体 ^3He は、液体 ^4He とは異なり、フェ

ルミ粒子である ^3He 原子が p 波三重項クーパー対を形成・凝縮して、ミリケルビンの超低温域で超流動になる⁷⁾。この異方的超流体では多数の秩序変数の存在を反映して、多彩な量子渦やテクスチャーが存在する。超流動 ^4He とは異なり、超流動 ^3He では核磁気共鳴 (NMR) により量子渦の構造や本数を観測することができる(このような観測が可能になるのは「量子渦」だからであることを強調しておく)。クルシウス達は超流動 ^3He を入れた回転円筒容器中にわずかな本数の量子渦を注入しその時間発展を調べたところ、約 $0.6T_c$ を境に劇的な変化を観測した(ここで T_c は超流動転移温度である)。高温側では、注入された渦は回転軸に平行にそろい、単に渦格子を形成するだけであった。しかし低温側では渦は不安定になり再結合を繰り返して分裂し、約千本にも増殖した。温度を下げると渦に働く相互摩擦が減少し、それがこの劇的な不安定性を生む原因になっている。この挙動は坪田達の数値計算により確認されている¹⁹⁾。

3-3 振動物体が作る量子乱流

ドイツのショッペ達²⁹⁾は、超流動 ^4He 中で、超伝導で磁気浮上させた半径 100 ミクロンの固体球を振動させ、その駆動力がある臨界値を超えると、球の応答(振動速度)が大きく変化することを観測した。これは常流体の効果ではなく、超流体の応答が変化したものであることがわかっている。この後、国内外の複数のグループが超流動 ^4He 、または ^3He 中で振動細線、または振動格子を用いた実験を行った²¹⁻²⁵⁾。いずれも振動物体の形状等種々の条件は異なるものの、注目すべき共通の物理が観測された。

(i) 振動物体の応答が変化する臨界速度は、数十 mm/sec のオーダーである。これを超えると、駆動力を増してもそれが有効に物体の振動速度を上げることができなくなる。言い換えれば、駆動によって注入したエネルギーが、物体の振動以外のどこかに逃げてしまっている(ただしこの臨界速度は、 ^3He の場合は約二十分の一になる)。

(ii) この応答の変化は、駆動力を徐々に増した過程と減じた

過程の間で、ヒステリシスを示す。

この現象の全貌はまだ明らかになっていないが、もともと超流体中に残っている量子渦の応答が変化したことは確実と考えられている。これらの物体に、最初どのような形状で量子渦が付着しているかは明らかではない。しかし、坪田達の量子渦糸の数値計算²⁶⁾によれば(図5)、物体の振動振幅が小さいときは、量子渦は単にケルビン波を共鳴励起して振動するだけだが、振動振幅が増すと量子渦の振動が大振幅・非線形になり、多数の再結合を起こして渦輪の放出を始め、振動物体は量子渦タングルに覆われるようになる。このことが事の本質であるとは思われるが、(ii)のヒステリシスの原因も含めて、まだ十分な説明がなされたとは言えない。

3-4 量子乱流の可視化

ここ数年の著しい発展に量子乱流の可視化がある。アメリカのラスロップ達は、超流動 ^4He 中にミクロンサイズの固体水素粒子を注入し、レーザーによる可視化を行った²⁷⁾。図6のaはラムダ温度以上の場合で、水素粒子はただランダムに分布しているだけである。ところがラムダ温度以下の超流動状態になる

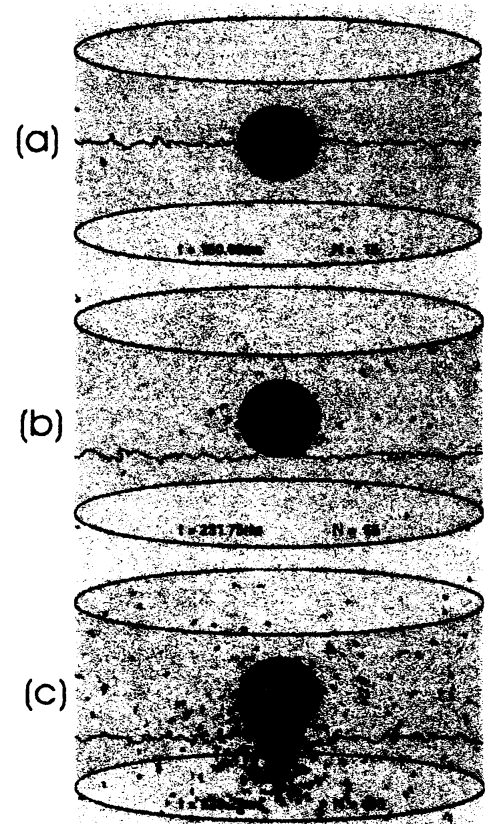


図5 球に付着した残余渦が交流流れ場を受けて渦タングルに発展する様子²⁶⁾。

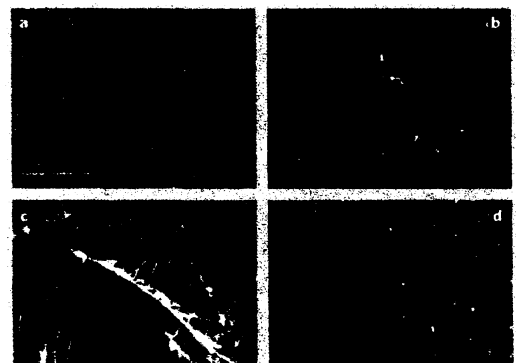


図6 固体水素粒子による量子渦の可視化²⁷⁾。

と、水素粒子が線状に配列するようになる(b、c)。これは量子渦に芯に水素粒子が捕獲されたものである。図 6d は回転状態で、量子渦の回転軸方向に整列し格子を形成していることがわかる。さらに同グループは量子渦の再結合も観測し²⁸⁾、それが循環量子 κ によるスケーリング則に従うことを論じている。

4. 中性原子気体の量子渦と量子乱流

1995 年レーザー冷却による中性原子気体ボース凝縮の実現は、物性物理学の世界に新風を吹き込んだ²⁹⁾。この系は、希薄気体であるが故に、超流動 ^4He に比べて原子間相互作用が弱く、平均場近似が定量的に正しくなる。さらに、相互作用の強さと符号がフェッシュバッハ共鳴により変調できること、原子密度や位相の可視化が可能であるなど、それまでの物性物理の系が持たない、著しい特徴を持っている。ここではそのような特徴が遺憾なく発揮された量子渦の物理について述べる。「もう一つのダ・ヴィンチ・コード」はこの系でも十分に生きていることがわかりいただけるであろう。

4-1 回転する BEC における量子渦格子

中性原子気体ボース凝縮の実現後、この系が果たして超流動性を示すか否かが大きな関心となった。ボース凝縮と超流動は本来に別の概念であって、一方が他方の必要条件でも十分条件でもない。

実際にボース凝縮体をかき混ぜることにより、量子渦の格子が観測された^{30, 31)}。このような回転体に対する応答は量子流体力学独特のものである。古典流体の場合は、任



図 7 回転するボース凝縮体での量子渦の格子³⁰⁾

意の回転角速度に対して剛体回転を行うが、量子流体は循環の量子化のために、任意の回転角速度に対して量子渦の複数作ることによって応答するのである。笠松、坪田、上田は、回転下の GP 方程式の数値解析を行い、回転が開始してから量子渦

格子が形成するまでの動的過程を明らかにした³²⁾。通常ボース凝縮体は調和振動子型の捕獲ポテンシャルに捕獲されているが、回転が加わると、その外側の希薄領域に発生した位相欠陥(幽霊渦)が凝縮体表面に押し寄せ、表面の不安定を引き起こす。やがて回転角速度に対応した個数の量子渦が凝縮体内に侵入し、最終的に格子を形成する。この挙動は先行する実験結果とよく一致した³³⁾。

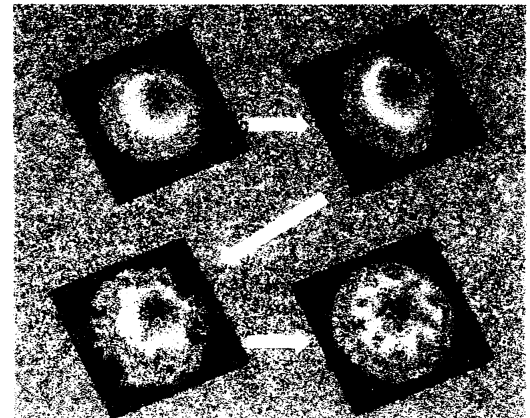


図 8 回転するボース凝縮体の量子渦格子形成。

4-2 原子気体ボース凝縮体の量子乱流

量子渦の作る典型的な共同現象と言え、流れ下の渦タングル(量子乱流)と回転下の渦格子である。超流動ヘリウムの世界では、どちらも徹底的に研究されてきたが、原子気体ボース凝縮体のほとんど全ての渦の研究は、格子に限定されており、量子乱流は考えられたことが無かった。その大きな理由の一つは、原子気体ボース凝縮体は、捕獲ポテンシャルに捕獲された有限系であるため「流す」ことができないからである。しかし、最近、小林と坪田は、直交する二軸歳差回転を課すことにより、この系で乱流を作ることができることをGP方程式の解析により示した³⁴⁾。実はこのアイデアは、既に水に対して用いられていたのだが³⁵⁾、当初、小林と坪田はそのことを知らなかった。得られた乱流の定常状態では、エネルギースペクトルのコルモゴロフ則が確認された。実験による実現が期待される。

5. 終わりに

量子乱流は現在、世界的にも多くの研究者が注目しており、今後ますます分野の枠を超えた研究が盛んになると思われる。本稿で述べたように、量子乱流の研究は、超流動ヘリウムか

ら中性原子気体ボース凝縮体にまで広がりつつある。何よりも、渦を通じて乱流を理解するという、古典乱流では必ずしも実現しなかった「もう一つのダ・ヴィンチ・コード」を、乱流に仕掛けることができる。それは、ダ・ヴィンチ以来 500 年の大きな謎に肉薄することを可能にするかもしれない。

引用文献

- 1)ダン・ブラウン(越前敏弥訳):『ダ・ヴィンチ・コード』(角川書店、2004)
- 2)U. Frisch: *TURBULENCE* (Cambridge University Press、1995).
- 3)木田重雄、柳瀬眞一郎:『乱流力学』(朝倉書店、1999)
- 4)坪田誠/西森拓:『量子渦のダイナミクス/砂丘と風紋の動力学』(培風館、2008)
- 5)M. Tsubota: *J. Phys. Soc. Jpn.* **77** (2008) 111006.
- 6)*Progress in Low Temperature Physics*, ed. W. P. Halperin and M. Tsubota (Elsevier、2008) Vol. 16.
- 7)山田一雄、大見哲巨:『超流動』(培風館、1995)
- 8) L. Onsager: *Nuovo Cimento Suppl.* **6** (1949) 249.
- 9)R. P. Feynman: *Progress in Low Temperature Physics*, ed. C. J. Gorter (North-Holland、1955) Vol. I、 p.17.
- 10)A. N. Kolmogorov: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30** (1941) 299 [reprinted in *Proc. R. Soc. A* **434** (1991) 9].
- 11)A. N. Kolmogorov: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **32** (1941) 16 [reprinted in *Proc. R. Soc. A* **434** (1991) 15].
- 12)J. Maurer and P. Tabeling: *Europhys. Lett.* **43** (1998) 29.
- 13)S. R. Stalp、 L. Skrbek and R. J. Donnelly: *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 4831.
- 14)C. Nore、 et al.: *Phys. Fluids* **9** (1997) 2544.
- 15)T. Araki、 M. Tsubota and S. K. Nemirovskii: *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 145301.
- 16)M. Kobayashi and M. Tsubota: *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 065302.

- 17) M. Kobayashi and M. Tsubota: J. Phys. Soc. Jpn. **74** (2005) 3248.
- 18) A. P. Finne, T. Araki, B. Blaauwgeers, V. B. Eltsov, N. B. Kopnin, M. Krusius, L. Skrbek, M. Tsubota and G. E. Volovik: Nature **424** (2003) 1022.
- 19) A. P. Finne, V. B. Eltsov, G. Eska, R. Hänninen, J. Kopu, M. Krusius, E. V. Thuneberg and M. Tsubota: Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 085301.
- 20) J. Jager, B. Schuderer and W. Schoepe: Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 566.
- 21) H. A. Nichol, et al.: Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 244501.
- 22) S. N. Fisher, et al.: Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 244.
- 23) R. Goto, et al.: Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 045301.
- 24) D. I. Bradley, et al.: Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 035302.
- 25) D. I. Bradley, et al.: Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 035301.C.
- 26) R. Hänninen, M. Tsubota, W. F. Vinen: Phys. Rev. **B75** (2007) 064502.
- 27) G. P. Bewley, D. P. Lathrop, K. R. Sreenivasan: Nature **441** (2006) 588.
- 28) M. S. Paoletti, M. E. Fisher, D. P. Lathrop: arXiv: 0810.552.
- 29) C. J. Pethick and H. Smith: Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases (Cambridge University Press, 2002).
- 30) K. W. Madison et al.: Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 806.
- 31) J. R. Abo-Shaeer et al.: Science **292** (2001) 476.
- 32) M. Tsubota, K. Kasamatsu and M. Ueda: Phys. Rev. **A65** (2002) 023603.
- 33) K. W. Madison et al.: Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4443.
- 34) M. Kobayashi and M. Tsubota: Phys. Rev. **A76** (2007) 045603.
- 35) S. Goto et al.: Phys. Fluids **19** (2007) 061705.